13эл математика 14.12.23

Тема: «Простейшие задачи в координатах»

49 Простейшие задачи в координатах

а) **Координаты середины отрезка.** В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку B с координатами $(x_2; y_2; z_2)$. Выразим координаты $(x; y; z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 128).

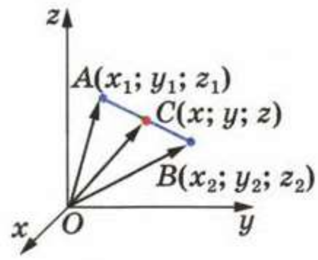

Рис. 128

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам трех точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\ \{x; y; z\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2; z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

б) **Вычисление длины вектора по его координатам.** Докажем, что **длина вектора $\vec{a}\ \{x; y; z\}$ вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

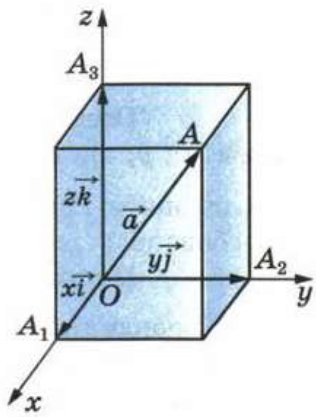

Рис. 129

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 129). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

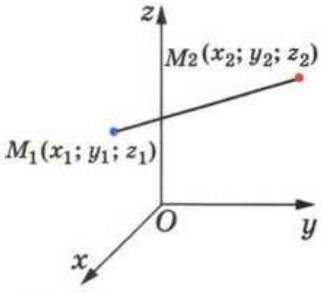

Рис. 130

В самом деле, если точка A не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 129), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Во всех других случаях расположения точки A (точка A лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) **Расстояние между двумя точками.** Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1 с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку M_2 с координатами $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 130). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. По формуле (3) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Но $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Таким образом, **расстояние между точками M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

24

Докажите, что треугольник ABC, где $A(-5; 5; 1)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 3; 1)$, является прямоугольным.

Доказательство.

Проверим, выполняется ли для данного треугольника условие теоремы, ________ теореме Пифагора. Найдем квадраты ________ треугольника: $AB^2 = (-4-(\_\_))^2 + (\_\_\_\_)^2 + \_\_\_\_ = 1^2 + \_\_ + \_\_ = \_\_$

$AC^2 =$ ____

$BC^2 =$ ____

Так как $AC^2 + BC^2 =$ ______, то по теореме, обратной теореме ________, треугольник ABC ____________ прямоугольным, причем $\angle$ __ $= 90°$.